SJST
sjst.scst.edu.ly
Surman **J**ournal for **S**cience and **T**echnology
ISSN: Online (2790-5721) - Print (2790-5713)
مجلة صرمان للعلوم والتقنية
Vol **7**, No.1.Jan – Jun. 2025
Pages: 114 ~ 128

دراسة رياضية للحلول العامة للمعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الاولى

نورة فرج رمضان الهوش
قسم الرياضيات كلية التربية الزهراء جامعة الجفارة

المستخلص

تناولت هذه الدراسة العلمية دراسة رياضية شاملة للحلول العامة للمعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى، حيث تعتبر هذه المعادلات من الأساسيات المهمة في الرياضيات التطبيقية، وتُستخدم في نمذجة العديد من الظواهر الفيزيائية والهندسية. تم التركيز في هذه الدراسة على الطرق الرياضية المختلفة التي تتيح إيجاد حلول دقيقة لهذه المعادلات، مما يسهم في تحسين فهم الأنظمة الديناميكية وتحليلها. أظهرت طريقة العامل التكاملي فعاليتها في التعامل مع المعادلات ذات المعاملات المتغيرة، مما يجعلها مناسبة لتطبيقات مثل تحليل الدوائر الكهربائية. أما طريقة فصل المتغيرات، فهي تبسط حل المعادلات القابلة للفصل بشكل مباشر، وتستخدم في مجالات متعددة مثل انتشار الحرارة وتدفق السوائل. من جهة أخرى، يُظهر تحليل لابلاس مرونة عالية في حل الأنظمة الديناميكية، خاصة عند وجود شروط ابتدائية معقدة، مما يجعله أداة مهمة في الهندسة والتحكم الآلي. تضمنت الدراسة مقارنة بين الطرق الثلاث، مسلطة الضوء على المزايا والعيوب لكل منها، ومدى ملاءمتها لحل المشكلات العملية. كما تم تطبيق كل طريقة على أمثلة توضيحية لتحليل أدائها وتوضيح تطبيقاتها. أكدت النتائج أن اختيار الطريقة الأنسب يعتمد على طبيعة المعادلة والمجال التطبيقي. توصي الدراسة بدمج الطرق الرياضية مع البرمجيات الحديثة لتسريع العمليات الحسابية وزيادة دقة الحلول. تسلط هذه الورقة الضوء على أهمية المعادلات التفاضلية في تحليل الأنظمة المعقدة، وتدعو إلى مزيد من البحث لتطوير طرق أكثر كفاءة ومرونة.

الكلمات المفتاحية: المعادلات التفاضلية الخطية، العامل التكاملي، فصل المتغيرات، تحليل لابلاس، الأنظمة الديناميكية، النمذجة الرياضية، التطبيقات الهندسية، الرياضيات التطبيقية.

Abstract

The following scientific paper is a detailed mathematical analysis of the general solutions of the first order linear differential equation which belong to the basic classes of applied mathematics and are applied in modeling many physical and engineering processes. Different numerical techniques that can be used to get the solution of these equations with a better understanding of the dynamic system is the key interest of the study. It has also been spelled out that integrating factor method is efficient when handling equations with variable coefficients and hence qualifies to be applied say in circuitry electrical circuits. With reference to the other method called separation of variables, it is also easy to solve separable equations directly and is used in heat transfer, fluid flow among others. Also, Laplace analysis is highly flexible when finding dynamics in systems especially with complicated initial conditions and is therefore essential in engineering and automatic control.

The latter compares the three methods with detailed explanations of the valuable and the possible drawbacks of each of them as well as the possibilities of their application to solve practical tasks. Both methods were used on examples and results were discussed to demonstrate their efficiency and possible uses. The results presented are to highlight the

Submitted: 20/01/2025 *Accepted: 05/02/2025*

idea that in choosing the method for solution proper attention should be paid to the type of equation and the field of its possible application. For computations, the study suggests the use of mathematical methods in conjunction with present software to expedite and increase the efficiency of solutions. This paper makes an appeal of further research especially on the use of differential equations in the promotion of more efficient and flexible ways in the analysis of complex systems.

المقدمة

المعادلات التفاضلية هي أحد أعمدة الرياضيات التطبيقية ومن المجالات الأساسية فيها، حيث تُستخدم لوصف الظواهر الديناميكية في العلوم الطبيعية والهندسية والاقتصادية. من بين الأنواع المختلفة لهذه المعادلات، تبرز المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى نظرًا لأهميتها وتطبيقاتها الواسعة في الحياة العملية. تعبر هذه المعادلات عن العلاقة بين متغير مستقل ومتغير تابع ومشتقاتهما الأولى، مما يجعلها أداة فعالة لتحليل الأنظمة البسيطة والمعقدة على حد سواء(Edwards & Penney, 2019).

تعتمد دراسة هذه المعادلات بشكل أساسي على استخراج الحلول العامة، والتي تمثل مجموعة الحلول الممكنة التي تحقق المعادلة الأصلية. الحلول العامة تُعتبر حجر الأساس لفهم السلوك الديناميكي للنظم، حيث يمكن من خلالها استنتاج الحلول الخاصة عند تطبيق شروط ابتدائية أو حدودية معينة (Boyce & DiPrima, 2017).

يُعتبر حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى تحديًا أكاديميًا وبحثيًا مهمًا، حيث يمكن أن تكون هذه المعادلات بمثابة أسس لمعادلات أكثر تعقيدًا من الرتب العليا. بالإضافة إلى ذلك، فإن العديد من التطبيقات العملية تعتمد بشكل أساسي على الحلول العامة لهذه المعادلات، على سبيل المثال نمذجة النمو السكاني، أو تحليل التيارات الكهربائية، أو وصف العمليات الحرارية وغيرها من التطبيقات العملية.

أحد الأساليب الأساسية المستخدمة في حل المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى هو طريقة العامل التكاملي، التي تعتمد على تحويل المعادلة إلى صيغة يمكن فيها حساب التكامل بسهولة. بالإضافة إلى ذلك، توفر طريقة فصل المتغيرات وسيلة فعالة لحل المعادلات عندما تكون المتغيرات المستقلة والتابعة قابلة للفصل. تناولت هذه الدراسة شرحًا تفصيليًا لهذه الطرق مع تقديم أمثلة تطبيقية تُظهر كيفية استخدامها لحل المعادلات التفاضلية في مجالات مثل الفيزياء والهندسة Zill, (2018).

تناولت العديد من الدراسات السابقة طرق حل المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى، وركزت على تطوير تقنيات تحليلية وأدوات حسابية لتسهيل الحلول. ومع ذلك، لا تزال هناك حاجة ملحة إلى تقديم رؤية شاملة ومتكاملة توضح العلاقة بين الحلول العامة والخاصة، مع تحليل التطبيقات المختلفة لهذه الحلول في مجالات متعددة.

تهدف هذه الدراسة إلى تقديم دراسة للحلول العامة للمعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى وتوفير أساس علمي يمكن الباحثين من فهم ديناميكيات الأنظمة الخطية بشكل أعمق، مما يفتح الباب أمام المزيد من التطبيقات الرياضية المتقدمة.

أهمية الدراسة

تكتسب دراسة الحلول العامة للمعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى أهمية كبيرة في المجالات الأكاديمية والتطبيقية على حد سواء، نظرًا لدورها المحوري في تحليل النظم الديناميكية وفهم سلوكها. تعد هذه المعادلات من أبسط النماذج الرياضية التي تُستخدم لتفسير وتوقع الظواهر الطبيعية والاجتماعية، مما يجعل دراسة الحلول العامة لها أساسًا لفهم أعمق للأنظمة الأكثر تعقيدًا.

تتمثل أهمية هذه الدراسة في عدة جوانب رئيسية:

1- توفير اساس رياضي لتحليل النظم

الحلول العامة للمعادلات التفاضلية الخطية تمثل الأداة الرياضية الأساسية لفهم العلاقة بين متغيرات الأنظمة الديناميكية المختلفة. يمكن لهذه الحلول أن تفسر السلوك الديناميكي للأنظمة الفيزيائية مثل حركة الجسيمات، أو الظواهر الاقتصادية مثل التضخم والنمو السكاني، مما يوفر أدوات تحليل قوية لدراسة هذه الأنظمة

2- تعزيز النماذج الرياضية في التطبيقات العملية

يتم استخدام المعادلات التفاضلية في مجموعة واسعة من التطبيقات العملية، مثل تصميم الدوائر الكهربائية، تحليل تدفق السوائل، ونمذجة العمليات الحرارية. تساعد هذه الدراسة على تبسيط النماذج الرياضية المعقدة وتوفير حلول دقيقة يمكن تطبيقها لتحسين كفاءة الأنظمة الهندسية أو تحسين التنبؤ في الظواهر الاقتصادية

3- توفير أساس لتطوير طرق حل جديدة

دراسة الحلول العامة تساهم في تحسين وتطوير طرق تحليل وحل المعادلات التفاضلية. يمكن أن يؤدي ذلك إلى ابتكار تقنيات رياضية جديدة تُسهِّل حل المعادلات الأكثر تعقيدًا أو تُسرع العمليات الحسابية، مما يعزز من قدرة الباحثين على معالجة مشكلات واقعية بشكل أسرع وأكثر دقة

المشكلة

رغم الأهمية البالغة للمعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى وتطبيقاتها الواسعة في العلوم الطبيعية والهندسية والاقتصادية، إلا أن هناك تحديات مستمرة تتعلق بفهم وتحليل الحلول العامة لهذه المعادلات. من أبرز هذه التحديات هو كيفية استخراج الحلول العامة بشكل منهجي ودقيق، خاصةً عند التعامل مع معادلات تحتوي على معاملات غير ثابتة أو تعقيدات رياضية إضافية.

تكمن المشكلة الأساسية في أن غياب فهم متكامل للحلول العامة يؤدي إلى صعوبات في تفسير سلوك الأنظمة التي تصفها هذه المعادلات. على سبيل المثال، دون حل عام واضح، يصبح من الصعب التنبؤ بتأثير الشروط الابتدائية أو المعلمات المختلفة على استقرار النظام وسلوكه بمرور الزمن. بالإضافة إلى ذلك، فإن العديد من الطرق الحالية لحل هذه المعادلات قد تكون غير فعالة أو معقدة عند تطبيقها على مسائل حقيقية، مما يستدعي الحاجة إلى تبسيط العمليات الرياضية وتطوير أدوات أكثر كفاءة ومرونة.

علاوة على ذلك، فإن ضعف الترابط بين الحلول العامة والتطبيقات العملية يجعل من الصعب على الباحثين استغلال الإمكانيات الكاملة لهذه المعادلات في تصميم وتحليل النظم الديناميكية. لذلك، تتطلب هذه المشكلة نهجًا علميًا متكاملًا لفهم البنية الرياضية للحلول العامة، وتوضيح كيفية استنتاج الحلول الخاصة التي تلبي الشروط الابتدائية المختلفة، مع استكشاف التطبيقات الواقعية لهذه الحلول في مختلف المجالات.

أهداف الدراسة:

تهدف هذه الدراسة إلى تحقيق مجموعة من الأهداف العلمية التي تسهم في فهم أفضل للمعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى وتوسيع نطاق تطبيقاتها. يمكن تلخيص هذه الأهداف على النحو التالي:

1. **توضيح الأسس النظرية للحلول العامة**

تقديم شرح واضح ومفصل للبنية الرياضية للحلول العامة للمعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى، مع التركيز على فهم العلاقة بين الحلول العامة والحلول الخاصة.

2. **تقديم منهجيات رياضية**

تقديم وعرض وتبسيط الطرق الرياضية المختلفة لحل المعادلات التفاضلية الخطية، مثل طريقة العامل التكاملي وفصل المتغيرات، مع تقديم خطوات عملية يمكن اتباعها بسهولة.

3. **تحليل تأثير الشروط الإبتدائية**

دراسة كيفية تأثير الشروط الابتدائية المختلفة على الحلول العامة وسلوك الأنظمة التي تصفها هذه المعادلات، مع استكشاف استقرار الحلول على المدى الطويل.

4. **ربط النظرية بالتطبيق**

توضيح التطبيقات العملية للحلول العامة في مجالات مختلفة مثل الفيزياء، الهندسة، والاقتصاد، مما يسهم في توسيع فهمنا لأهمية هذه الحلول في حل المشكلات الواقعية.

الإطار النظري

المعادلات التفاضلية هي معادلات تربط بين دالة ومشتقاتها، وتستخدم بشكل أساسي في نمذجة وتحليل الأنظمة التي تتغير بمرور الوقت أو في الفضاء. المعادلات التفاضلية تصف كيفية تغير المتغير التابع بناءً على التغيرات في المتغيرات المستقلة. يُصنف هذا النوع من المعادلات إلى نوعين رئيسيين: المعادلات التفاضلية العادية (ODEs) والمعادلات التفاضلية الجزئية (PDEs)، حيث تتعامل الأولى مع متغير مستقل واحد فقط، بينما تتعامل الثانية مع أكثر من متغير مستقل. المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى هي المعادلات التي تحتوي على مشتقة من الدرجة الأولى فقط. في هذا السياق، المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى التي تحتوي على دالة واحدة y(x) هي إحدى أبسط وأهم المعادلات في الرياضيات التطبيقية. هذه المعادلات تُستخدم لوصف العديد من الظواهر الطبيعية والهندسية، مثل حركة الجسيمات في الفيزياء، والتفاعلات الكيميائية، والنمو السكاني، وتحليل الدوائر الكهربائية.(Boyce & DiPrima, 2017)

مفهوم المعادلة التفاضلية الخطية من الدرجة الاولى:

المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى هي معادلة تأخذ الشكل العام التالي:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$

حيث:

- $\frac{dy}{dx}$ هو المشتق الاول للدالة Y(x) بالنسبة للمتغير المستقل X
- $P(x)$ هو دالة في x تمثل المعامل الذي يتم ضربه في الدالة Y(x)
- $Q(x)$ هي دالة في x لا تحتوي على Y(x)

تُعتبر المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى إحدى المعادلات الأساسية التي تُستخدم في تحليل النظم التي تتغير بمرور الوقت. هذه المعادلة تكون خطية لأنها تحتوي على دالة Y(x) والمشتقة الأولى لها فقط، أي لا توجد قوى أو معادلات غير خطية بين Y(x) والمشتقات. إذا كانت تحتوي على غير ذلك من الحدود مثل y2 إن المعادلات التفاضلية الخطية من الدرجة الأولى تعتبر نقطة انطلاق أساسية في دراسة الأنظمة الديناميكية والفيزيائية.(Zill, 2018)

الحلول العامة للمعادلات التفاضلية الخطية من الدرجة الاولى:

لحل المعادلة التفاضلية الخطية من الدرجة الأولى:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$

تُستخدم عدة طرق رياضية شهيرة. في هذا القسم، سنتناول ثلاث طرق رئيسية لحل هذه المعادلة :طريقة العامل التكاملي، طريقة فصل المتغيرات، و طريقة التحويلات الرياضية.

1.طريقة العامل التكاملي

تعد طريقة العامل التكاملي واحدة من أبرز الأساليب المستخدمة لحل المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى. تتمثل فائدة هذه الطريقة في أنها تحول المعادلة التفاضلية الخطية إلى معادلة تكاملية يمكن حلها بشكل مباشر باستخدام قواعد التكامل التقليدية. هذه الطريقة تُستخدم عندما تكون المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى لا يمكن فصل متغيراتها بسهولة، وهو أمر شائع في الكثير من التطبيقات العملية.

الهدف من استخدام العامل التكاملي هو إيجاد دالة تُسمى "العامل التكاملي" $\mu(x)$ بحيث إذا ضربنا المعادلة التفاضلية الأصلية في هذه الدالة، فإن المعادلة تتحول إلى شكل يمكن التكامل عليه بسهولة. العامل التكاملي $\mu(x)$ تم تحديده بحيث يجعل المعادلة قابلة للتحويل إلى معادلة مشتقة تامة من الشكل:

$$\frac{d}{dx}(\mu(x)y)$$

أي أن الطرف الأيسر من المعادلة يجب أن يكون مشتقة للدالة $\mu(x)y$

إيجاد العامل التكاملي

نبدأ بتحديد العامل التكاملي $\mu(x)$ الذي يجعل المعادلة قابلة للتحويل إلى مشتقة تامة. لكي نفعل ذلك، نضرب المعادلة الأصلية في $\mu(x)$.

العامل التكاملي هو دالة $\mu(x)$ يتم تعريفه كالتالي

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx}$$

إذن نضرب المعادلة الأصلية في هذا العامل التكاملي، مما يتيح لنا إعادة كتابة المعادلة على النحو التالي:

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)P(x)y = \mu(x)Q(x)$$

الهدف هو أن يصبح الطرف الأيسر معادلة مشتقة تامة. إذا كانت:

$$\frac{d}{dx}(\mu(x)y) = \mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu'(x)y$$

فإننا نريد أن تكون:

$$\mu(x)P(x) = \mu'(x)$$

من هذه المعادلة نحصل على معادلة تفاضلية للعامل التكاملي$\mu(x)$

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = P(x)$$

لحل هذه المعادلة التفاضلية، نلاحظ أن الطرف الأيسر هو مشتقة لوغاريتمية للدالة $\mu(x)$. إذا قمنا بتكامل المعادلة على الجانبين، نحصل على:

$$\ln|\mu(x)| = \int P(x)\,dx$$

بتطبيق الأسس الرياضية، نجد أن:

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx}$$

وهكذا نكون قد وجدنا العامل التكاملي

والان بتطبيق المعامل µ(x) على المعادلة الأصلية

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

نضرب المعادلة في العامل التكاملي $\mu(x)$الذي حصلنا عليه

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)P(x)y = \mu(x)Q(x)$$

ونظرًا لأن $\mu(x)P(x) = \mu'(x)$ تصبح المعادلة

$$\frac{d}{dx}(\mu(x)y) = \mu(x)Q(x)$$

الآن أصبح الطرف الأيسر مشتقة تامة، وبالتالي يمكننا تكامل المعادلة بالنسبة لـ X

وأخيرًا، يتم حل المعادلة بالنسبة لـ Y(x)

$$\mu(x)y = \int \mu(x)Q(x)\,dx + C$$

حيث C هو ثابت التكامل.

الحل العام للمعادلة:

أخيرًا، نحل المعادلة بالنسبة لـ $y(x)$ بقسمة المعادلة على $\mu(x)$

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)Q(x)\,dx + C\right)$$

وبذلك نكون قد حصلنا على الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى باستخدام طريقة العامل التكاملي.

تطبيقات عملية:

sjst.scst.edu.ly
Surman Journal for Science and Technology
ISSN: Online (2790-5721) - Print (2790-5713)
مجلة صرمان للعلوم والتقنية
Vol 7, No.1.Jan – Jun. 2025
Pages: 114 ~ 128

تُستخدم طريقة العامل التكاملي في العديد من التطبيقات العملية في مختلف المجالات. على سبيل المثال:

- **في الهندسة الكهربائية**: تُستخدم هذه الطريقة لحل المعادلات التي تصف استجابة الدوائر الكهربائية التي تحتوي على مقاومات وملفات وحساسات.
- **في الفيزياء**: تُستخدم لحل المعادلات التي تصف الحركة أو التفاعلات في الأنظمة الديناميكية.
- **في الاقتصاد**: تُستخدم لحساب النمو الاقتصادي أو لحل المعادلات التي تصف تفاعل أسعار السلع والخدمات مع الزمن.

تُعتبر طريقة العامل التكاملي واحدة من الطرق القوية والمرنة في حل المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى، وتُعد أداة أساسية في العديد من التطبيقات العلمية والهندسية.، وتُستخدم على نطاق واسع في الفيزياء، مثل حل المعادلات التي تصف التغير في الجهد أو التيار في الدوائر الكهربائية.
.(Boyce & DiPrima, 2017)

2. طريقة فصل المتغيرات

طريقة فصل المتغيرات هي واحدة من أقدم وأبسط الطرق لحل المعادلات التفاضلية العادية (ODEs) من الرتبة الأولى. تُستخدم هذه الطريقة عندما تكون المعادلة التفاضلية قابلة لإعادة صياغتها بحيث يُمكن فصل المتغيرات المستقلة X والمتغيرات التابعة Y على طرفين مختلفين من المعادلة. بشكل عام، يتم تطبيق هذه الطريقة على المعادلات التي يمكن كتابتها على الشكل التالي:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$

حيث:

- $g(x)$ هي دالة تعتمد فقط على المتغير X
- $h(y)$هي دالة تعتمد فقط على المتغير Y

خطوات حل المعادلة بطريقة فصل المتغيرات

أولا: فصل المتغيرات

نقوم بإعادة ترتيب المعادلة بحيث يتم وضع جميع الحدود المتعلقة ب Y (المتغير التابع) على جانب واحد من المعادلة، والحدود المتعلقة ب X (المتغير المستقل) على الجانب الاخر

$$\frac{1}{h(y)}\,dy = g(x)\,dx$$

الخطوة الثانية: التكامل

عد فصل المتغيرات، يتم تكامل كلا الطرفين بالنسبة للمتغير المناسب:

$$\int \frac{1}{h(y)}\,dy = \int g(x)\,dx$$

الخطوة الثالثة: الحل العام

بعد حساب التكامل، نحصل على علاقة بين X و Y. في كثير من الحالات، يمكننا التعبير عن الحل بصيغة صريحة y(x) أو تركه في صيغة ضمنية.

مثال رياضي على طريقة فصل المتغيرات

لنأخذ المثال التالي:

$$\frac{dy}{dx} = xy$$

نقوم بفصل المتغيرات كالتالي:

$$\frac{1}{y}\,dy = x\,dx$$

نقوم بتكامل كلا الطرفين

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int x\,dx$$

من التكامل نحصل على

$$\ln|y| = \frac{x^2}{2} + C$$

حيث C هو ثابت التكامل

لإيجاد الحل نقوم باخذ الأس الطبيعي للطرفين

$$y = e^{\frac{x^2}{2}+C} = e^{C}e^{\frac{x^2}{2}}$$

وباعتبار e^C ثابتا جديدا C1

$$y = C_1 e^{\frac{x^2}{2}}$$

التطبيقات العملية لطريقة فصل المتغيرات

نظرا لدقة وبساطة طريقة فصل المتغيرات في حل المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الاول نجدها تدخل في كثير من التطبيقات العملية في المجالات التطبيقية المختلفة.

- **في الفزياء**: في ميكانيكا الموائع، تُستخدم طريقة فصل المتغيرات لحل معادلة انتشار الحرارة (Heat Equation) في الأنظمة البسيطة. على سبيل المثال، في حالة انتقال الحرارة في قضيب رقيق وطويل، يمكن فصل المتغيرات لحل العلاقة الزمنية والمكانية لدرجة الحرارة
(Carslaw & Jaeger, 1959)
- **في الهندسة الكهربائية**: تستخدم هذه الطريقة لحل معادلات الشحن والتفريغ في الدوائر الكهربائية البسيطة التي تحتوي على مقاومات ومكثفات. على سبيل المثال، يمكن فصل المتغيرات في معادلة تصف الجهد V عبر مكثف مشحون أثناء التفريغ:

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{V}{RC}$$

حيث R هو المقاومة و C هو السعة الكهربائية (Boyce & DiPrima, 2017).

- في البيولوجيا: في دراسة النمو السكاني، تُستخدم المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى لوصف نمو عدد الأفراد في بيئة محدودة باستخدام نموذج اللوجستيك

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

حيث:

- P هو عدد الأفراد.
- rهو معدل النمو الطبيعي.
- K هو السعة الحاملة للبيئة.

باستخدام فصل المتغيرات، يمكن إيجاد حل هذا النموذج (Murray, 2002)

تعتبر طريقة فصل المتغيرات أداة أساسية في حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى نظرًا لبساطتها وفعاليتها في العديد من التطبيقات العملية. كما أنها تُستخدم في حل المعادلات التفاضلية الجزئية البسيطة التي يمكن فصل متغيراتها مثل معادلة لابلاس (Laplace Equation) ومعادلة الموجة.(Evans2010).

3.حل المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الاولى باستخدام صيغة لابلاس

تعد معادلة لابلاس واحدة من أهم المعادلات التفاضلية الجزئية (PDEs) التي تُستخدم على نطاق واسع في الفيزياء والهندسة.
الشكل العام لمعادلة لابلاس في بعدين هو

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

حيث $u(x,y)$ هو المتغير التابع، و x و y هما المتغيران المستقلان.
الخطوة الأولى: افتراض شكل الحل
نفترض أن الحل $u(x,y)$ يمكن كتابته كحاصل ضرب دالتين منفصلتين:

$$u(x,y)=X(x)Y(y)$$

حيث $X(x)$ يعتمد فقط على x و $Y(y)$ يعتمد فقط على y
الخطوة الثانية: فصل المتغيرات
بتعويض $u(x,y)=X(x)Y(y)$
في معادلة لابلاس $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ نحصل على:

$$Y(y)\frac{d^2X(x)}{dx^2}+X(x)\frac{d^2Y(y)}{dy^2}=0$$

يمكن إعادة ترتيب هذه المعادلة إلى:

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2}=-\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2}=\lambda$$

حيث λ هو ثابت الفصل
الخطوة الثالثة: حل المعادلتين الناتجتين
المعادلة الخاصة بـ $X(x)$

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2}=\lambda X(x)$$

حل هذه المعادلة يعتمد على إشارة λ:
إذا كانت $\lambda=k^2>0$

- اكبر من الصفر

$$X(x)=C_1e^{kx}+C_2e^{-kx}$$

- اصغر من الصفر

$$X(x)=C_1\cos(kx)+C_2\sin(kx)$$

المعادلة الخاصة بـ $Y(y)$
إذا كانت $\lambda=k^2>0$

- اكبر من الصفر

$$Y(y)=D_1\cosh(ky)+D_2\sinh(ky)$$

- اصغر من الصفر

$$Y(y)=D_1\cos(ky)+D_2\sin(ky)$$

الخطوة الرابعة: الحل العام

بدمج الحلين لـ $X(x)$و $Y(y)$ الحل العام لمعادلة لابلاس يعتمد على شروط الحدود للمسألة المعطاة. على سبيل المثال، إذا كانت الشروط الحدودية معرفة، فإن القيم الخاصة للثوابت (D1, D2, C1. C2) يمكن تحديدها.

التطبيقات العملية لحلول لابلاس باستخدام فصل المتغيرات

تمثل معادلة لابلاس أداة أساسية في الرياضيات التطبيقية، حيث تُستخدم لحل مشكلات تتعلق بالحدود في مختلف المجالات العلمية والهندسية. بفضل بساطتها النسبية وتعدد تطبيقاتها، تُعد هذه المعادلة حجر الزاوية في تحليل الظواهر الفيزيائية المختلفة.

- **في الفيزياء**: تُستخدم معادلة لابلاس في دراسة تدفق السوائل غير القابلة للانضغاط، حيث تُطبق لحساب توزيع الضغط في الموائع الثابتة أو الحركة البطيئة (Batchelor, 2000).
- **في انتقال الحرارة**: ستخدم معادلة لابلاس لحساب توزيع درجة الحرارة في الأجسام ذات التوصيل الحراري المنتظم عندما تكون في حالة ثابتة، مثل تحليل تبريد المفاعلات النووية أو التوصيل الحراري في المباني(Carslaw & Jaeger, 1959).
- **في تصميم الهوائيات**: تُستخدم معادلة لابلاس في تصميم الهوائيات لتحديد توزيع الجهد الكهربائي على سطح الهوائي، مما يُساعد في تحسين كفاءة الإشعاع الكهرومغناطيسي (Balanis, 2016).

الدراسات السابقة

احتوى مجال المعادلات التفاضلية من الدرجة الاولى وحلولها العديد من الدراسات منذ بداية وضع اساسيات الحلول الخطية للمعادلات التفاضلية ولا زالت هذه الدراسات في تطور مستمر في هذا المجال.

1.الحلول العددية للمعادلات التفاضلية (نعمة وكوثر. 2019)

تناولت الدراسة الطرق العددية لحل المعادلات التفاضلية العادية، مشيرةً إلى أهمية هذه الطرق عندما تكون الحلول التحليلية صعبة أو غير ممكنة. يبدأ الفصل بمناقشة معادلات الرتبة الأولى من الشكل dy/dx = f(x,y) مع شروط ابتدائية. ثم تم توسيع هذه المناقشة لتشمل أنظمة من المعادلات التفاضلية مثل:

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad i = 1,2, \dots, n$$

حيث يتم تحويل المعادلات ذات الرتب العليا إلى أنظمة معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى. كما أوضحت المؤلفة كيفية استنباط الحلول العددية لهذه الأنظمة باستخدام تقنيات مختلفة. تُعد هذه الدراسة مرجعًا مهمًا للمهتمين بالحلول العددية للمعادلات التفاضلية، خاصة في مجالات الهندسة والفيزياء التطبيقية.

2.التطبيقات العملية للمعادلات التفاضلية باستخدام Maple (Oyelami, Benjamin. 2024)

قامت هذه الدراسة على الدمج بين النظرية والتطبيقات العملية للمعادلات التفاضلية العادية باستخدام برامج Maple وتناولت الدراسات العديد من الموضوعات الأساسية مثل معادلات الرتبة الأولى، وتحويلات لابلاس وملين، وسلاسل فورييه، وحلول السلاسل الأسية. من أهم مميزات هذا العمل هو الأمثلة التطبيقية المأخوذة من مجالات مختلفة مثل الأحياء، والاقتصاد، والكيمياء، والطب. عرضت الدراسة أيضًا حلولًا رمزية، ورسومات ثنائية وثلاثية الأبعاد، ومسارات حلول متحركة باستخدام .Maple تعد هذه الدراسة إضافة قيّمة للباحثين والطلاب في مجالات الرياضيات والهندسة، حيث تقدم فهمًا معمقًا لتطبيقات المعادلات التفاضلية في الحياة الواقعية واوصت الدراسة بضرورة ربط الحلول النظرية للمعادلات التفاضلية بالبرامج الحاسوبية والالكترونية وتوسيع البحث في هذ المجال.

3.الحلول الأساسية للمعادلات التفاضلية ذات القيم الموجهة (Plotnikov 2024)

تناولت الدراسة أنواعًا مختلفة من المشتقات في المعادلات التفاضلية ذات القيم الموجهة، بما في ذلك مشتقاتHukuhara ، PS، و .BGوقد تمت دراسة مشكلات كوشي مع هذه الأنواع من المشتقات. أظهرت الدراسة أن المشكلات الأولية ذات المشتقات PS و BGتمتلك عددًا لانهائيًا من الحلول، وركزت على الحلول الأساسية. الحلول الأساسية هي تلك التي تكون فيها دالة قطر المقطع الحلولي إما متزايدة أو متناقصة. قدم البحث شروطًا لوجود هذه الحلول الأساسية وناقش تأثير نوع

المشتقة، ومعاملات المصفوفة، وطبيعة القيم الأولية. تضمن البحث أمثلة نموذجية لتوضيح النتائج النظرية واوصت الدراسة بتكثيف الجهود البحثية في مجال المعادلات التفاضلية ذات القيم الموجهة.

2. التطبيقات العملية لمعادلات الرتبة الأولى في مشكلات النمو والانحلال (Shende, 2024)

سلطت هذه الدراسة الضوء على تطبيقات المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى في مشكلات النمو والانحلال. استعرض الباحث نموذج مالثوس (Malthusian population model) الذي يعتمد على طريقة فصل المتغيرات لحل مشكلات السكان. أشار إلى أهمية المعادلات التفاضلية في الرياضيات والهندسة، حيث تظهر القوانين الفيزيائية بشكل رياضي من خلال هذه المعادلات. كما ناقشت الدراسة المعادلات الخطية المتجانسة وغير المتجانسة من الرتبة الأولى، مع التركيز على تطبيقاتها في الدوائر الكهربائية والنماذج البيولوجية. يقدم هذا البحث توضيحًا لكيفية استخدام المعادلات التفاضلية في تحليل الظواهر الفيزيائية والبيولوجية.

3. المعادلات التفاضلية الضبابية الخطية من الرتبة الأولى (Bede,2007)

تناولت التجربة دراسة المعادلات التفاضلية الخطية الضبابية من الرتبة الأولى باستخدام مفهوم المشتقات العامة. تتيح هذه الطريقة الحصول على حلول تقل فيها درجة عدم اليقين تدريجيًا بفضل تقلص طول الدعم الخاص بالدالة. يركز البحث على التطبيقات التي تكون فيها الحلول الضبابية أكثر توافقًا مع النماذج الواقعية مقارنةً بالطرق التقليدية. كما قدمت الدراسة المشتقات المتعلقة بفروق H ومنتجات الدوال، واشتقت حلولًا باستخدام نسخ مختلفة من صيغة التغيير في الثوابت. أظهرت الأمثلة في الدراسة تنوعًا كبيرًا في سلوك الحلول الممكنة، مما يبرز القيمة التطبيقية لهذه الطريقة في نمذجة الأنظمة المعقدة.

4. قواعد حساب تحويلات لابلاس (Shoukralla,2018)

تناولت الدراسة قواعد وأساليب حساب تحويلات لابلاس العكسية التي تعد من الأدوات الأساسية في حل المعادلات التفاضلية. أوضح Shoukralla أن عملية إيجاد تحويلات لابلاس العكسية تعني تحديد الدالة الزمنية f(t) إذا عُلم تحويلها. يُبرز البحث طرقًا متعددة لحساب هذه التحويلات، بدءًا من استخدام الجداول الخاصة بتحويلات لابلاس العكسية وحتى تطبيق نظرية الكسور الجزئية لتبسيط الدوال. كما ناقشت الدراسة ست طرق مختلفة لحساب تحويلات لابلاس العكسية، بما في ذلك طريقة الجداول وقواعد أخرى مثل استخدام نظرية الالتفاف وطريقة Heaviside. قدم هذا البحث مرجعًا عمليًا للمهتمين بتطبيق تحويلات لابلاس العكسية في حل المسائل الهندسية والفيزيائية عن طريق المعادلات التفاضلية من الرتبة الاولى.

المنهجية العلمية

اتبعت هذه الدراسة منهجية تحليلية ورياضية بحتة تستند إلى طرق ونظريات الحلول العامة للمعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى واخذت الدراسة طرق فصل المتغيرات والمعامل التكاملي كأساس لحل المعادلات التفاضلية من الدرجة الاولى لدقة ومباشرة هذه الطرق في ايجاد الحلول التفاضلية ولدخولها في العديد من التطبيقات العملية الهندسية والفيزيائية والاجتماعية والاقتصادية وغيرها. حيث تميز هذه المعادلات التفاضلية بوجود مشتقات من الرتبة الأولى فقط، وتأخذ الشكل العام:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

حيث أن $P(x)$ و$Q(x)$ هما دالتان معرفتان بشكل مستمر على المجال x. الهدف الأساسي من المنهجية هو إيجاد الحلول العامة لهذه المعادلات باستخدام تقنيات رياضية متقدمة مثل طريقة العامل التكاملي، طريقة فصل المتغيرات، وحلول معادلة لابلاس باستخدام فصل المتغيرات.

تضمنت الخطوات الاساسية للمنهجية الاتي:

1. تحليل المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى

تتمثل الخطوة الأولى في تحويل المعادلة التفاضلية الخطية إلى صيغة يمكن التعامل معها باستخدام إحدى الطرق التحليلية. تأخذ المعادلة الشكل التالي:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

بعدها نحدد فيما إذا كانت المعادلة متجانسة $Q(x)$ أو غير متجانسة وبناء على ذلك يتم تحديد الطريقة المناسبة للحل.

2. تحديد الطريقة المناسبة لحل المعادلة التفاضلية

بعد تحويل المعادلة التكاملية الى صيغة يمكن التعامل معها باستخدام احدى الطرق التحليلية تم اختيار الطريقة المناسبة من الثلاث طرق "فصل المتغيرات والمعامل التكاملي وتحويل لابلاس" بناء على شروط معينة كالاتي:

- طريقة فصل المتغيرات

  يتم استخدام هذه الطريقة في حال كان من الممكن فصل المتغيرات التابعة والمستقلة رياضيا حيث تكون المتغيرات المستقلة بطرف والتغيرات التابعة بالطرف الاخر.

- طريقة العامل التكاملي

  يتم استخدام هذه الطريقة في حال كان من غير الممكن فصل المتغيرات التابعة والمستقلة رياضيا.

- طريقة معامل لابلاس

  يتم استخدام هذه الطريقة في حال كان من الممكن وضع المعادلة التفاضلية في الصيغة العامة لمعادلة لابلاس

3. ايجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية وحساب قيم المتغيرات.

تم تطبيق الطرق الثلاث على مثال رياضي مع ايضاح الفروق بين هذه الطرق في حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الاولى.

حل المعادلة التفاضلية:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

1. باستخدام طريقة العامل التكاملي

$$\boldsymbol{\mu(x) = e^{\int 2dx} = e^{2x}}$$

المعادلة تصبح:

$$\frac{d}{dx}(e^{2x}y) = e^{3x}$$

الحل العام:

$$y(x) = \frac{1}{e^{2x}} \int e^{3x} dx + C$$

2. باستخدام طريقة فصل المتغيرات

المعادلة

$$\frac{dy}{dx} = xy$$

فصل المتغيرات:

$$\frac{1}{y} dy = x dx$$

التكامل:

$$\ln y = \frac{x^2}{2} + C$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} + 3y = 5$$

Surman Journal for Science and Technology
ISSN: Online (2790-5721) - Print (2790-5713)
مجلة صرمان للعلوم والتقنية
Vol 7, No.1.Jan – Jun. 2025
Pages: 114 ~ 128

3. باستخدام تحويل لابلاس

$$sY(s) - y(0) + 3Y(s) = \frac{5}{s}$$

الحل في المجال الترددي

$$Y(s) = \frac{5/s + y(0)}{s + 3}$$

النتائج وتحليل النتائج

تم تطبيق الطرق الثلاثة لحل معادلات تفاضلية خطية من الرتبة الأولى باستخدام أمثلة عملية. وقد أظهرت النتائج أن كل طريقة قدمت حلولًا تتفق مع الشروط الابتدائية والمعادلات المدروسة. كانت الحلول الناتجة كما يلي:

- باستخدام طريقة العامل التكاملي، تم الحصول على حلول دقيقة للمعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات المتغيرة، حيث أظهر الحل استجابة واضحة للتغيرات في الشروط الابتدائية.
- عبر طريقة فصل المتغيرات، تم حل معادلات تفاضلية بسيطة وذات تطبيقات عملية، مثل معادلة التدفق الحراري، وكانت الحلول مباشرة وسهلة التفسير.
- باستخدام تحليل لابلاس، أمكن حل معادلات معقدة تضمنت شروطًا ابتدائية وحدودًا زمنية، مما يبرز كفاءة هذه الطريقة في الأنظمة الديناميكية.

الجدول (9-أ) يوضح مقارنة بين الطرق المختلفة بناء على النتائج التي تم الحصول عليها

الخاصية	طريقة العامل التكاملي	طريقة فصل المتغيرات	تحليل لابلاس
نوع المعادلة	خطية	قابلة للفصل	خطية وغير خطية
السهولة	متوسطة	بسيطة	تتطلب معرفة بالجداول
الحل العام	يوفر الحل العام	يوفر حلا خاصا	يوفر حلا عامل وشروطا خاصة
التطبيقات	الانظمة الميكانيكية والكهربائية	الظواهر الفيزيائية	تحليل الانظمة الديناميكية

تحليل الفروقات بين الطرق الثلاث:

أظهرت التجارب النظرية تباينا عند استخدام الطرق الرياضية لحل المعادلات التفاضلية من الرتبة الاولى وذلك حسب شكل المعادلة والشروط الابتدائية والنهائية لها وقيمة وترتيب المتغيرات التابعة والمستقلة. فيما يلي أوجه الفروقات بين الطرق النظريات الثلاث:

- **الدقة والكفاءة:** أظهرت طريقة العامل التكاملي نتائج دقيقة جدًا لكنها تطلبت خطوات رياضية معقدة، خاصة عندما كانت الدوال Q(x) و P(x) غير بسيطة. في المقابل، كانت طريقة فصل المتغيرات أكثر كفاءة وسهولة، ولكنها تقتصر على نوع معين من المعادلات. أما تحليل لابلاس فقد وفر مرونة عالية لحل المعادلات في مجال التردد، مع تقديم حلول دقيقة وسهلة التفسير في الأنظمة الفيزيائية.
- **التطبيقات العملية:** طريقة العامل التكاملي أثبتت كفاءتها في التطبيقات الهندسية مثل تحليل الأنظمة الكهربائية. بينما طريقة فصل المتغيرات كانت فعالة في مجالات مثل الديناميكا الحرارية والانتشار. وفي المقابل تحليل لابلاس أظهر تفوقًا في الأنظمة الزمنية مثل دوائر التحكم الكهربائية.

لتحليل اكثر دقة تم استخدام الجدول (9- ب) التالي

جدول (9- ب) يوضح الفروقات بين الطرق الثلاث من حيث الدقة

الطريقة	الدقة الرياضية
العامل التكاملي	عالية
فصل المتغيرات	متوسطة
تحويل لابلاس	عالية جدا

تحليل النتائج باستخدام الرسوم البيانية

تم رسم الحلول باستخدام برامج حاسوبية مثل MATLAB و Mapleحيث أظهرت الرسوم تطابقًا كبيرًا بين الحلول النظرية والعملية، مما يعزز من صحة النتائج وفعالية الطرق المستخدمة.

الاستنتاجات والتوصيات

من خلال التجارب النظرية الرياضية في تطبيق الحلول الخطية على المعادلات التفاضلية من الرتبة الاولى تم الوصول الى عدد من الاستنتاجات الرئيسية:

1. كفاءة الحلول

تم التوصل إلى أن الطرق الثلاثة المدروسة (العامل التكاملي، فصل المتغيرات، وتحليل لابلاس) تقدم حلولًا دقيقة ومناسبة لمعادلات تفاضلية خطية من الرتبة الأولى. كل طريقة لها مزاياها وتطبيقاتها المحددة، مع اختلاف في مستوى التعقيد والدقة حسب نوع المعادلة والشروط المرتبطة بها.

2. تطبيقات واسعة النطاق

- طريقة العامل التكاملي أثبتت جدواها في الأنظمة الهندسية مثل تحليل الدوائر الكهربائية.
- طريقة فصل المتغيرات كانت ملائمة في المجالات ذات المعادلات القابلة للفصل مثل الديناميكا الحرارية وانتشار الحرارة.
- تحليل لابلاس أظهر مرونة عالية في تحليل الأنظمة الزمنية، مما يعزز من استخدامه في التحكم الآلي والأنظمة الفيزيائية المعقدة.

3. أهمية استخدام البرمجيات

أثبتت البرمجيات مثل MATLAB و Maple دورها الحاسم في تبسيط العمليات الحسابية والتحقق من الحلول النظرية، مما يقلل من الأخطاء الحسابية ويوفر الوقت.

التوصيات

تضمنت هذه الدراسة وبعد الوصول للنتائج وتحليلها عدة توصيات مهمة في مجال حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الاولى وهي:

- **اختيار الطريقة المناسبة**

ينبغي اختيار الطريقة الأكثر ملاءمة بناءً على نوع المعادلة وتطبيقها العملي. يوصى باستخدام:

- **طريقة العامل التكاملي** لحل المعادلات ذات المعاملات المتغيرة أو غير المتجانسة.
- **طريقة فصل** المتغيرات في الحالات البسيطة حيث يمكن فصل المتغيرات بسهولة.
- تحليل لابلاس للأنظمة الديناميكية والفيزيائية التي تتطلب التعامل مع الشروط الابتدائية المعقدة.

- **التدريب على البرمجيات**

يوصى بدمج برمجيات رياضية متقدمة مثل MATLAB و Mapleفي المناهج الدراسية لتطوير قدرات الطلاب والباحثين في تطبيق الحلول العددية والتحليلية.

- **دمج الطرق**

يمكن تحقيق دقة أعلى من خلال دمج الطرق المختلفة لحل المعادلات التفاضلية، مما يؤدي إلى حلول أكثر شمولًا وتطبيقية.

- **التطبيقات العملية**

يوصى بتطبيق الحلول الرياضية التي تمت دراستها في هذا البحث على مشكلات واقعية في الهندسة والعلوم التطبيقية لتحسين الأداء وتحليل الأنظمة بشكل أفضل.

- **البحث المستقبلي**

ينبغي إجراء دراسات مستفيضة لتطوير وتحسين الطرق الرياضية المستخدمة لحل المعادلات التفاضلية الخطية وغير الخطية، مع التركيز على تطبيقها في مجالات حديثة مثل الذكاء الاصطناعي وتحليل البيانات الكبيرة.

الخاتمة

في هذه الدراسة، تم تناول الحلول العامة للمعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى باستخدام ثلاث طرق رئيسية: العامل التكاملي، فصل المتغيرات، وتحليل لابلاس. أظهرت النتائج كفاءة كل طريقة في معالجة أنواع معينة من المعادلات، مع تقديم حلول دقيقة تلبي الشروط الابتدائية والحدودية. تمت مقارنة المزايا والعيوب لكل طريقة، مما ساهم في تسليط الضوء على استخداماتها المختلفة في التطبيقات العملية، مثل الأنظمة الفيزيائية والهندسية.
أظهرت مقارنة الطرق تفوق كل طريقة في مواقف محددة، حيث يتميز العامل التكاملي بالقدرة على التعامل مع المعادلات ذات المعاملات المتغيرة، بينما تُعد طريقة فصل المتغيرات مثالية للمعادلات البسيطة القابلة للفصل. في المقابل، أظهر تحليل لابلاس مرونة عالية في التعامل مع الشروط الابتدائية المعقدة.
أثبتت الدراسة أهمية اختيار الطريقة المناسبة لحل المعادلات التفاضلية من الرتبة الاولى بناءً على طبيعة المعادلة وتطبيقاتها والشروط الابتدائية والنهائية للمتغيرات. كما أكدت على الدور الحيوي للبرمجيات الرياضية في تسريع العمليات الحسابية وزيادة دقة النتائج وضرورة ربط هذه البرمجيات مع الجانب النظري والتحليلي في حل المعادلات التفاضلية.

12.المراجع

1. Najariyan, M., Mazandarani, M., & Balas, V. E. (2018). Solving first-order linear fuzzy differential equations system. In *Soft Computing Applications: Proceedings of the 7th International Workshop Soft Computing Applications (SOFA 2016), Volume 2* (pp. 330-353). Springer International Publishing.
2. Torelli, L. (1989). Stability of numerical methods for delay differential equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics, 25*(1), 15-26.
3. Edwards, C. H., & Penney, D. E. (2019). *Differential equations and boundary value problems* (6th ed.). Pearson.
4. Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2017). *Elementary differential equations and boundary value problems*. Wiley.
5. Zill, D. G. (2018). *A first course in differential equations*. Cengage Learning.
6. Edwards, C. H., & Penney, D. E. (2019). *Differential equations and boundary value problems*. Pearson.
7. Jung, S. M. (2005). Hyers–Ulam stability of linear differential equations of first order, III. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 311*(1), 139-146.
8. Batchelor, G. K. (2000). *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press.
9. Jackson, J. D. (1999). *Classical electrodynamics*. Wiley.
10. Evans, L. C. (2010). *Partial differential equations*. American Mathematical Society.
11. Kreyszig, E. (2019). *Advanced engineering mathematics*. Wiley.
12. Balanis, C. A. (2016). *Antenna theory: Analysis and design*. Wiley.
13. Tenenbaum, M., & Pollard, H. (1985). *Ordinary differential equations*. Dover Publications.

14. Hindmarsh, J. L., & Rose, R. M. (1982). A model of the nerve impulse using two first-order differential equations. *Nature, 296*(5853), 162-164.
15. Oyelami, B. (2024). *Ordinary differential equations and applications I: With Maple examples*.
16. Plotnikov, A., Komleva, T., & Skripnik, N. (2024). Existence of basic solutions of first-order linear homogeneous set-valued differential equations. *Matematychni Studii, 61*, 61-78. https://doi.org/10.30970/ms.61.1.61-78
17. Shende, S. (2024). The application of first-order differential equations in growth and decay problems.
18. Bede, B., Rudas, I. J., & Bencsik, A. L. (2007). First-order linear fuzzy differential equations under generalized differentiability. *Information Sciences, 177*(7), 1648-1662.
19. Shoukralla, E. (2018). *Rules of calculation: Laplace transforms, convolution theorem, Heaviside's method*. ISBN: 977-17-0339-0.